

Formułowanie relacji konstytutywnych SMA z wykorzystaniem struktur reologicznych

Politechnika
Warszawska

Artur Zbiciak

Wydział Inżynierii Lądowej
Instytut Dróg i Mostów

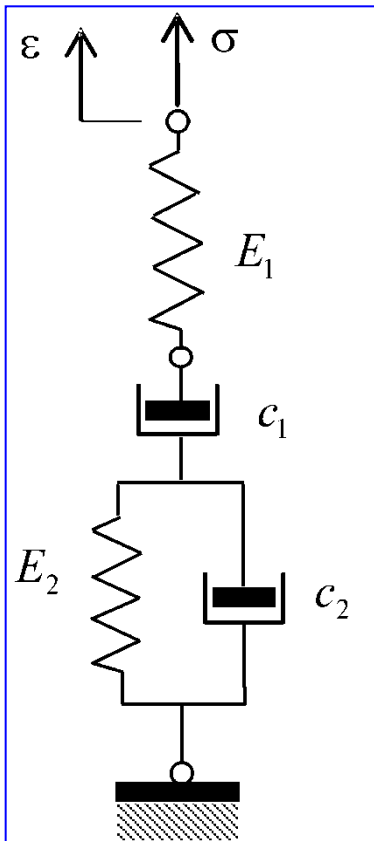
Warszawa, 20.10.2017 r.



Cel i zakres referatu

- Prezentacja opisu nieliniowych elementów reologicznych przy zastosowaniu pojęć mechaniki niegładkiej i analizy wypukłej.
- Analiza oryginalnych struktur reologicznych odwzorowujących konstytutywne cechy materiałów SMA.
- Implementacja numeryczna modeli materiałów z pamięcią kształtu w środowisku systemu MES ABAQUS na podstawie autorskich algorytmów zaprogramowanych w ramach procedur użytkownika.
- Przedstawienie możliwości wykorzystania sformułowanych związków fizycznych SMA w wybranych zagadnieniach dynamiki konstrukcji.

Struktury reologiczne



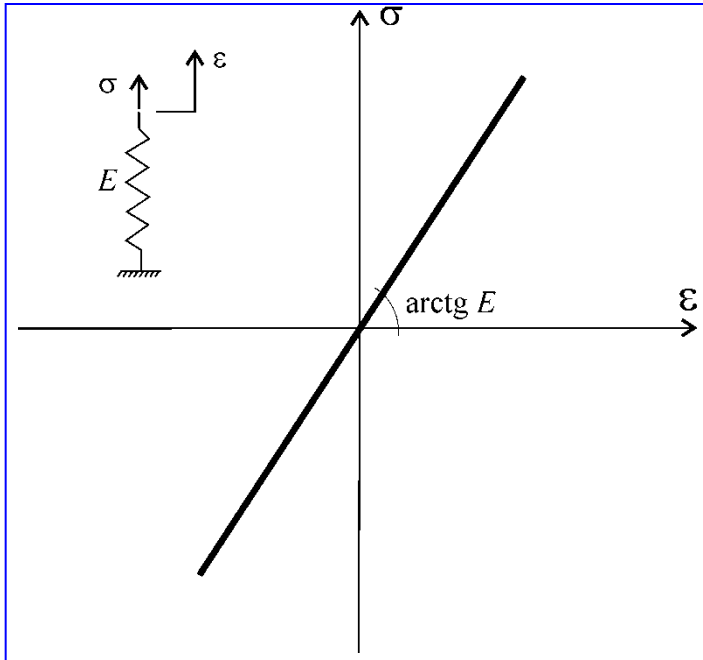
Reologia – dział mechaniki zajmujący się opisem zjawisk akumulowania i dyssypacji energii w ośrodkach ciągłych.

Element reologiczny – symbol graficzny (sprężyna, tłumik, suwak ...) reprezentujący określone zjawisko energetyczne.

Struktura reologiczna – złożony schemat, zbudowany z podstawowych elementów, odzwierciedlający zjawiska fizyczne sprężystości i dyssypacji zachodzące w materiale.

Rys. Przykładowa, liniowa struktura reologiczna

Materiał liniowo-sprężysty (Hooke'a)



Rys. Symbol graficzny i
jednowymiarowa relacja
konstrytuwna materiału Hooke'a

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) := \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathcal{W}^*(\boldsymbol{\sigma}) := \sup_{\boldsymbol{\varepsilon} \in E} \{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}) \}$$

$$\mathcal{W}^*(\boldsymbol{\sigma}) := \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathcal{W}^*(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{C} = K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \left(\mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)$$

Stany kuliste i dewiatorowe

$$\mathbf{p} = 3K \mathbf{a}$$

$$\mathbf{s} = 2G \mathbf{e}$$

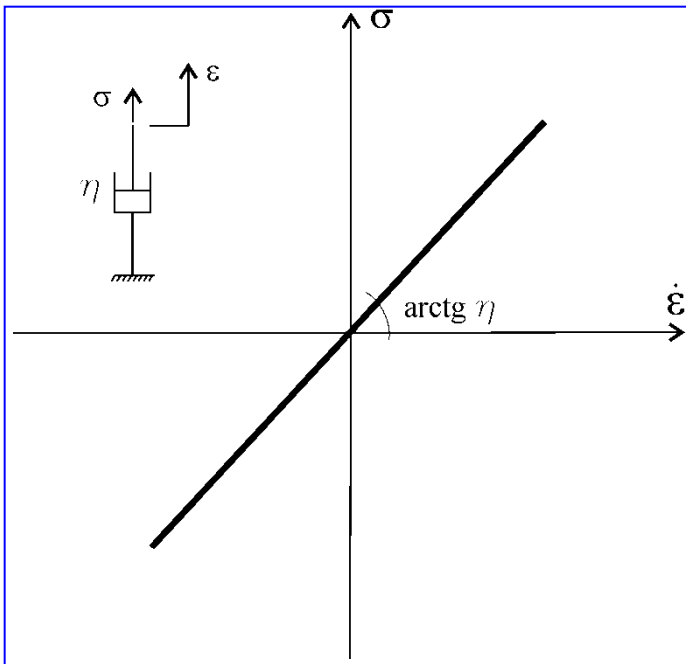
$$\mathbf{p} := \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$$

$$\mathbf{s} := \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$$

$$\mathbf{a} := \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}$$

$$\mathbf{e} := \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}$$

Materiał lepki (ciecz Newtona)



Rys. Symbol graficzny i
jednowymiarowa relacja
konstrytutywna cieczy Newtona

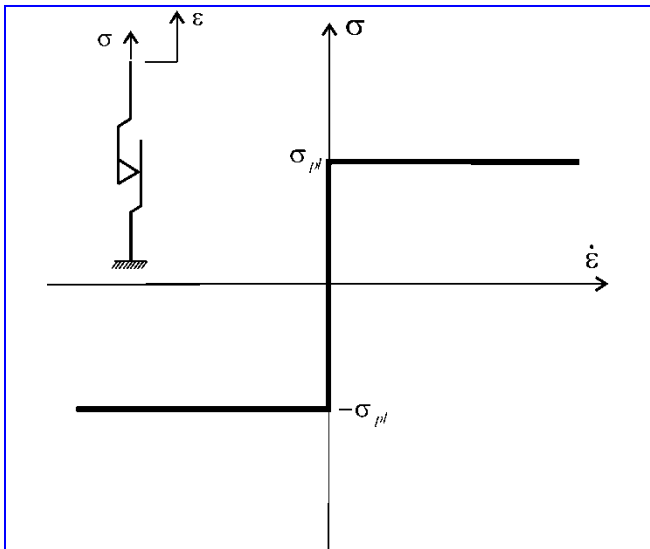
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{A} = \mu_{vol} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2 \mu_{dev} \left(\mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)$$

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) := \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\mathcal{D}^*(\boldsymbol{\sigma}) := \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Model sztywno-idealnie plastyczny (Saint-Venanta)



Rys. Symbol graficzny i
jednowymiarowa relacja
konstrytuwna materiału Saint-
Venanta

$$\sigma \in \Theta_{pl}$$

$$\sigma \cdot \dot{\epsilon} \geq \tilde{\sigma} \cdot \dot{\epsilon} \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Theta_{pl}$$

$$\mathcal{D}(\dot{\epsilon}) = \Pi_{\Theta_{pl}}(\dot{\epsilon})$$

$$\Pi_{\Theta_{pl}}(\dot{\epsilon}) := \sup_{\tilde{\sigma} \in \Theta_{pl}} \tilde{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}$$

$$\mathcal{D}^*(\sigma) = \Psi_{\Theta_{pl}}(\sigma)$$

$$\Psi_{\Theta_{pl}}(\sigma) := \begin{cases} 0 & \text{gdy } \sigma \in \Theta_{pl} \\ +\infty & \text{gdy } \sigma \notin \Theta_{pl} \end{cases}$$

$$\sigma \in \partial \mathcal{D}(\dot{\epsilon}) \quad \dot{\epsilon} \in \partial \mathcal{D}^*(\sigma)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in \Theta_{pl} \quad \longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in N_{\Theta_{pl}}(\boldsymbol{\sigma})$$

$$N_{\Theta_{pl}}(\boldsymbol{\sigma}) := \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathbb{V}^{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \geq 0 \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in \Theta_{pl} \right\}$$

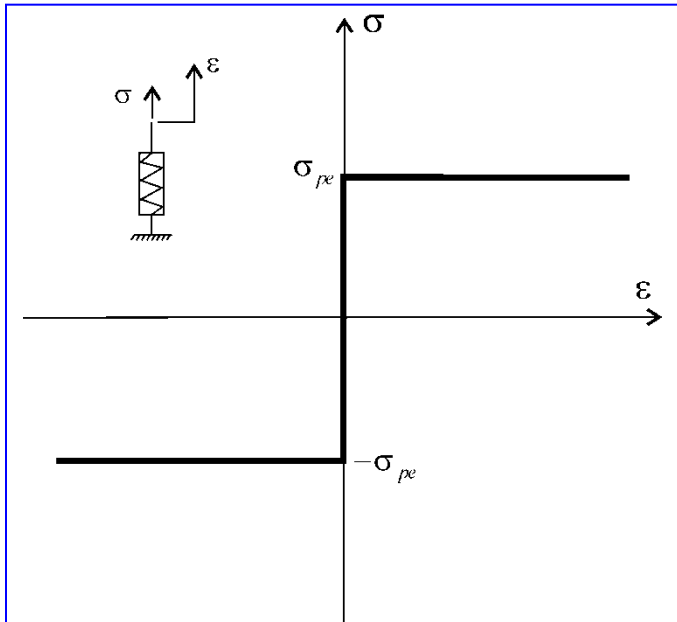
$$\Theta_{pl} := \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S} : F_{pl}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \right\}$$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \in \Theta_{pl} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in \Theta_{pl} \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda_{pl} \nabla F_{pl}(\boldsymbol{\sigma}) \\ F_{pl}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad \lambda_{pl} \geq 0, \quad \lambda_{pl} F_{pl}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{array}$$

Model sztywno-idealnie sprężysty (Hencky'ego)



Rys. Symbol graficzny i
jednowymiarowa relacja konstytutywna
materiału Hencky'ego

$$\sigma \in \Theta_{pe}$$

$$\sigma \cdot \epsilon \geq \tilde{\sigma} \cdot \epsilon \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Theta_{pe}$$

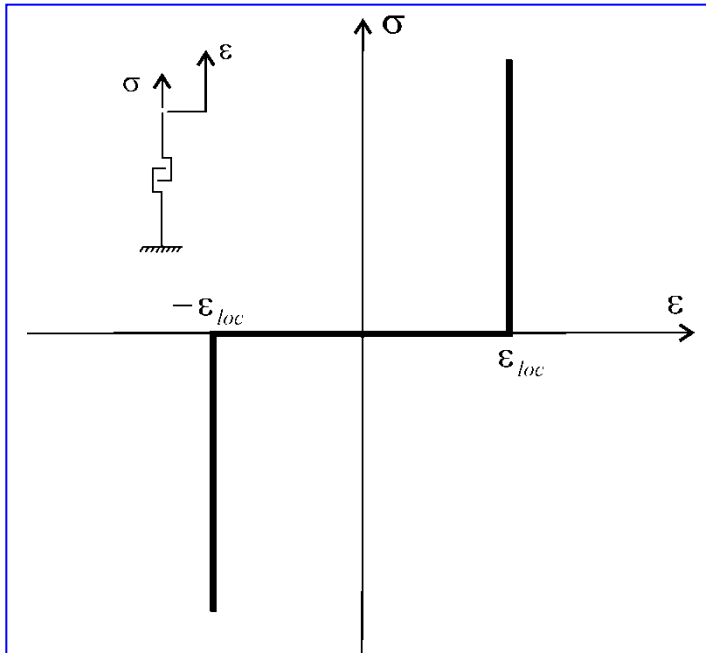
$$\mathcal{W}(\epsilon) = \Pi_{\Theta_{pe}}(\epsilon)$$

$$\mathcal{W}^*(\sigma) = \Psi_{\Theta_{pe}}(\sigma)$$

$$\epsilon = \lambda_{pe} \nabla F_{pe}(\sigma)$$

$$F_{pe}(\sigma) \leq 0, \quad \lambda_{pe} \geq 0, \quad \lambda_{pe} F_{pe}(\sigma) = 0$$

Model materiału z *lockingiem*



$$\varepsilon \in \Theta_{loc}$$
$$\sigma \cdot \varepsilon \geq \sigma \cdot \tilde{\varepsilon} \quad \forall \tilde{\varepsilon} \in \Theta_{loc}$$

$$\mathcal{W}(\varepsilon) = \Psi_{\Theta_{loc}}(\varepsilon)$$

$$\mathcal{W}^*(\sigma) = \Pi_{\Theta_{loc}}(\sigma)$$

Rys. Symbol graficzny i jednowymiarowa relacja konstytutywna materiału z *lockingiem*

Model materiału Kepesa

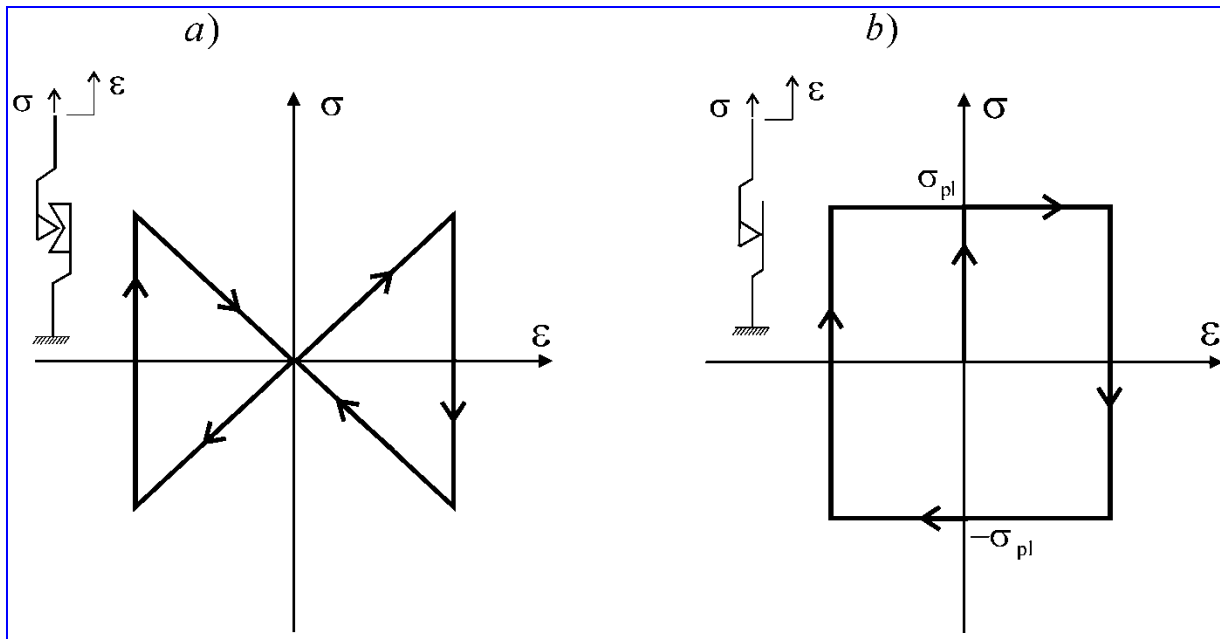
$$\sigma \in \Theta_{kp}(\varepsilon)$$

$$\sigma \cdot \dot{\varepsilon} \geq \tilde{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon} \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Theta_{kp}(\varepsilon)$$



$$\dot{\varepsilon} = \lambda_{kp} \nabla_{\sigma} F_{kp}(\sigma, \varepsilon)$$

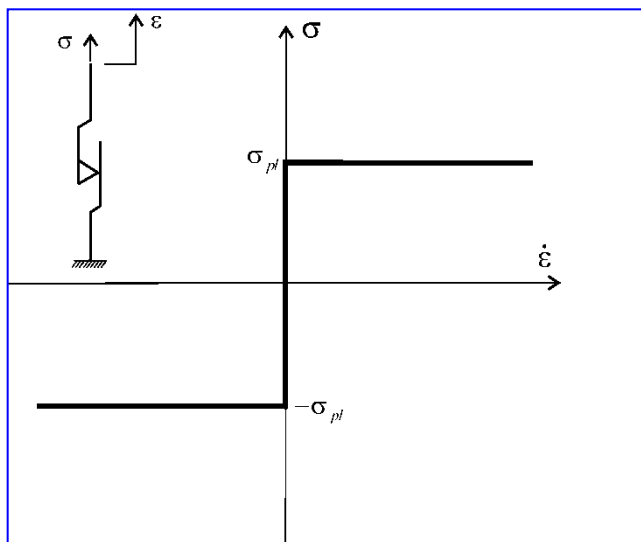
$$F_{kp}(\sigma, \varepsilon) \leq 0, \quad \lambda_{kp} \geq 0, \quad \lambda_{kp} F_{kp}(\sigma, \varepsilon) = 0$$



Rys. Pętle histerezy materiału Kepesa (a) i Saint-Venanta (b)

Zestawienie elementów nieliniowych

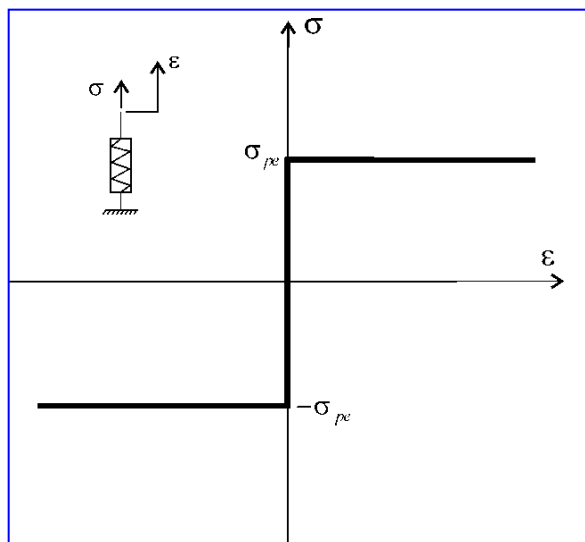
Model Saint-Venanta



$$\sigma \in \Theta_{pl}$$

$$\sigma \cdot \dot{\varepsilon} \geq \tilde{\sigma} \cdot \dot{\varepsilon} \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Theta_{pl}$$

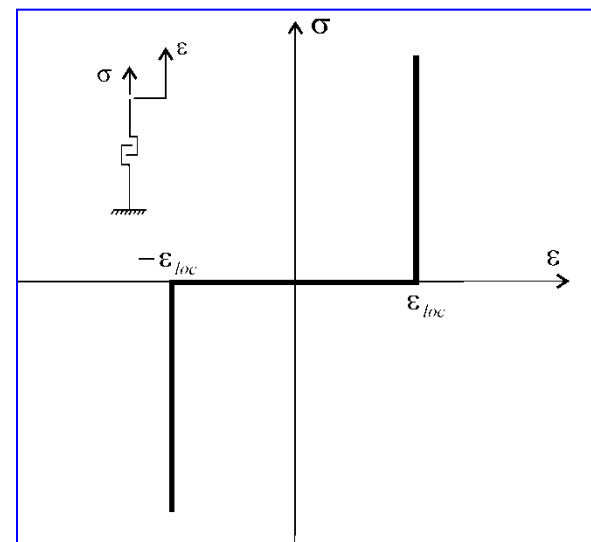
Model Hencky-ego



$$\sigma \in \Theta_{pe}$$

$$\sigma \cdot \varepsilon \geq \tilde{\sigma} \cdot \varepsilon \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Theta_{pe}$$

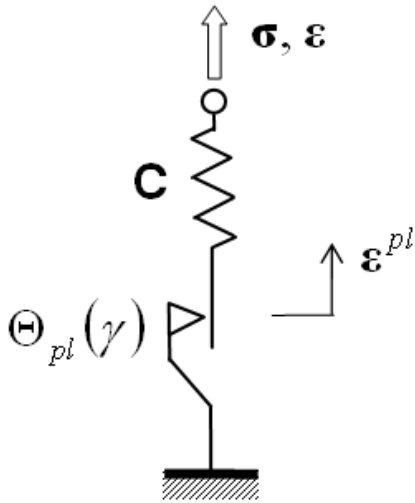
Materiał z lockingiem



$$\varepsilon \in \Theta_{loc}$$

$$\sigma \cdot \varepsilon \geq \sigma \cdot \tilde{\varepsilon} \quad \forall \tilde{\varepsilon} \in \Theta_{loc}$$

Następstwo różniczkowe inkluzji



$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma + \varepsilon^{pl} \\ \sigma &\in \Theta_{pl}(\gamma) \\ \dot{\varepsilon}^{pl} &\in N_{\Theta_{pl}}(\sigma) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \mathbf{C}^{-1} \cdot \dot{\sigma} + \dot{\varepsilon}^{pl} \\ \dot{\sigma} &\in D_c^+ \Theta_{pl}(t, \sigma) \\ \dot{\varepsilon}^{pl} &\in N_{D_c^+ \Theta_{pl}}(\dot{\sigma}) \end{aligned}$$

Pochodna kontyngentowa
odwzorowania wielowartościowego:

$$D_c^+ \Theta_{pl}(t, \sigma) := \left\{ \dot{\sigma} : \liminf_{h \rightarrow +0} \text{dist} \left(\dot{\sigma}, \frac{\Theta_{pl}(\gamma(t+h)) - \sigma}{h} \right) = 0 \right\}$$

Jawna postać relacji konstytutywnej

$$F_{pl}^{HMH}(\boldsymbol{\sigma}, \gamma) := \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\|^2 - k_{pl}^2 (1 + \beta \gamma)$$

$$\gamma(t) = \int_0^t \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} \, d\tau$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{pl}) \\ \dot{\mathbf{e}}^{pl} = & \begin{cases} \mathbf{0} & \text{gdy } \|\mathbf{s}\| < k \sqrt{2(1 + \beta \gamma)} \\ \lambda \mathbf{s} & \text{gdy } \|\mathbf{s}\| = k \sqrt{2(1 + \beta \gamma)} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{G[\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}}]^+}{k^2 (2G + \beta k^2) (1 + \beta \gamma)}$$

Model bez wzmocnienia:
związki Prandtla-Reussa

$$\begin{aligned} & \mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{pl}) \\ \dot{\mathbf{e}}^{pl} = & \begin{cases} \mathbf{0} & \text{gdy } \|\mathbf{s}\| < \sqrt{2} k \\ \frac{[\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}}]^+}{2k^2} \mathbf{s} & \text{gdy } \|\mathbf{s}\| = \sqrt{2} k \end{cases} \end{aligned}$$

Zagadnienie początkowo-brzegowe

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, t_k]$$

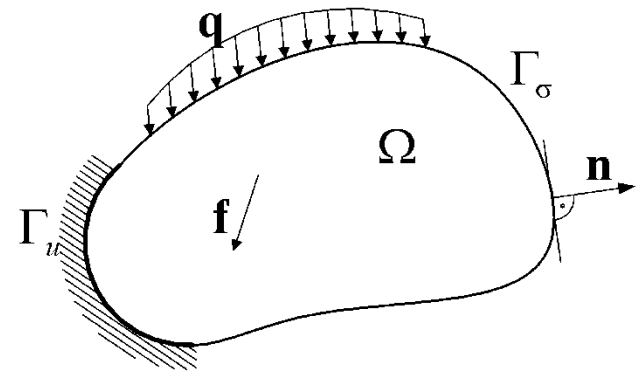
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T] \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, t_k]$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \right)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = f_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, t_k]$$

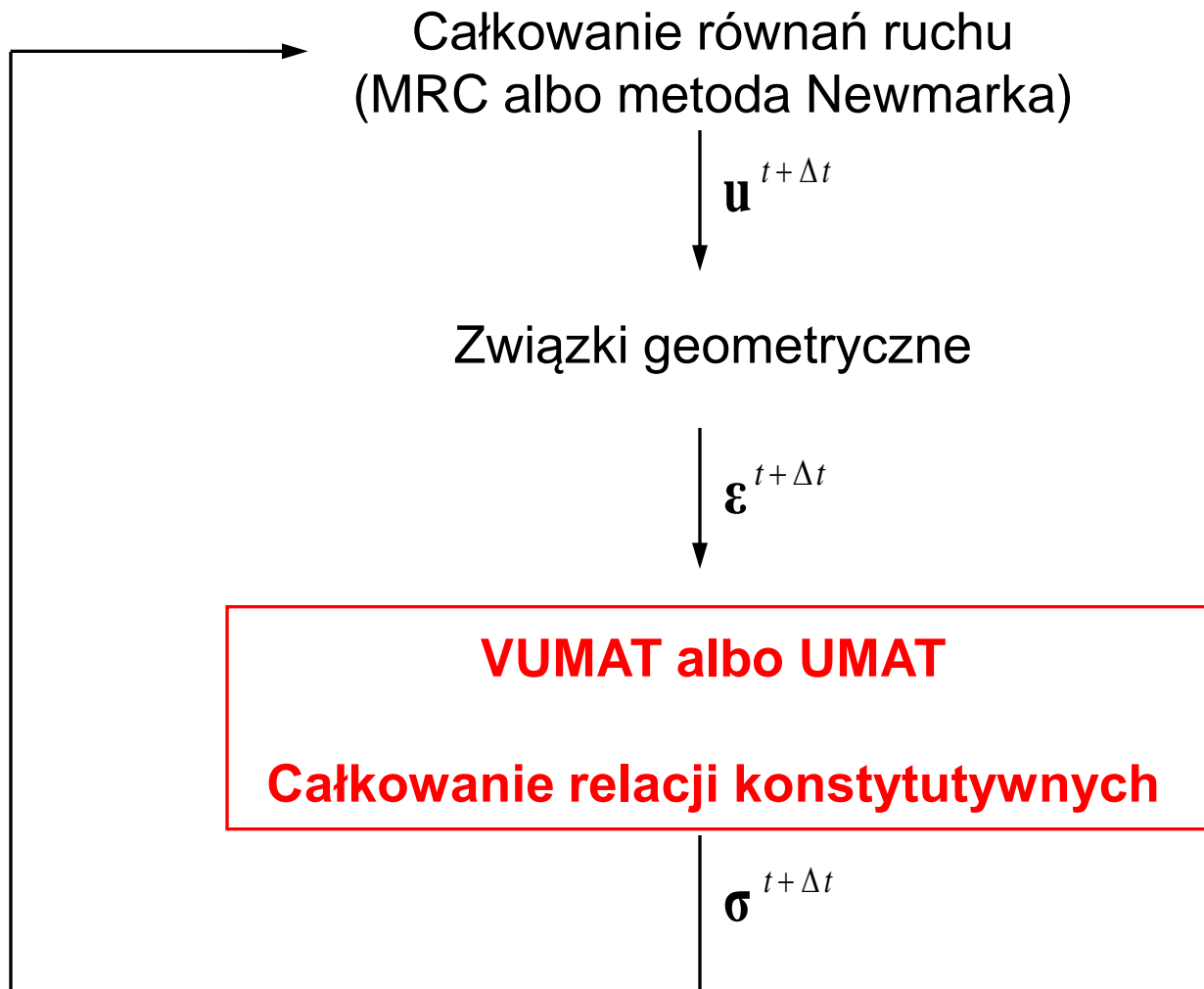


$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, \forall t \in [0, t_k]$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \forall t \in [0, t_k]$$

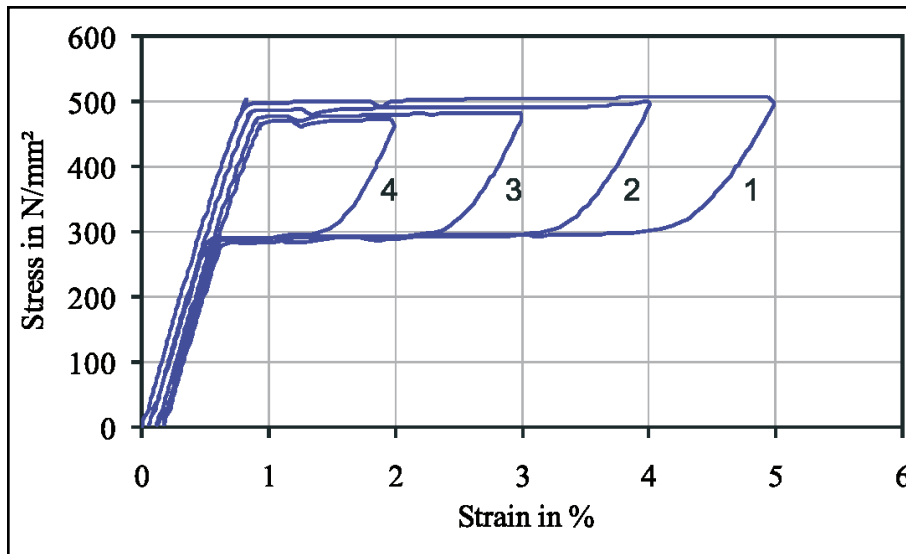
$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\tilde{\mathbf{u}}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad t = 0$$

Implementacja MES – program ABAQUS



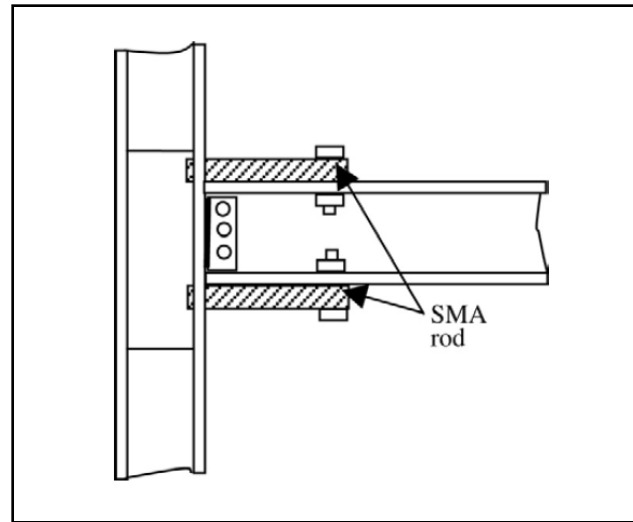
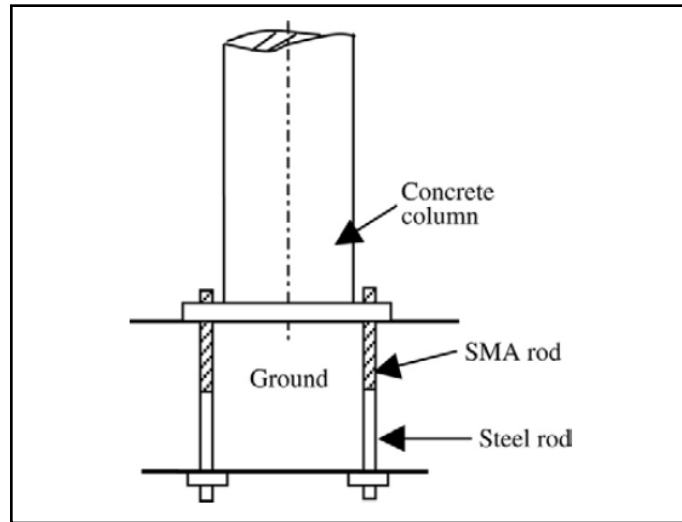
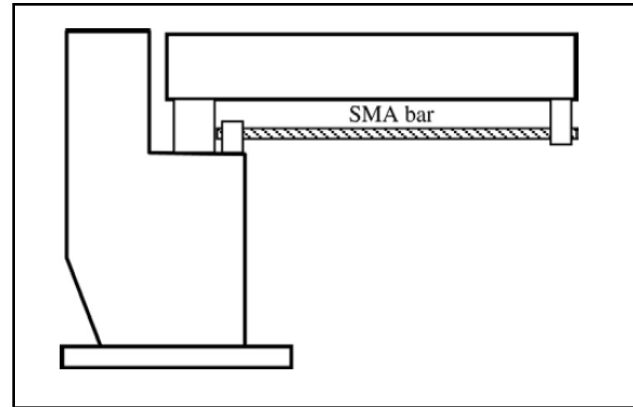
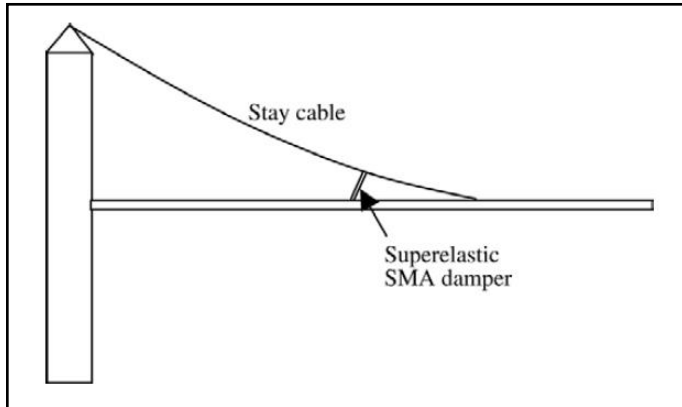
Charakterystyka materiałów SMA

- Zdolność do przenoszenia (utrzymywania) stałej wartości naprężeń
- Brak trwałych odkształceń po odciążeniu
- Dyssypacja (rozpraszanie) energii



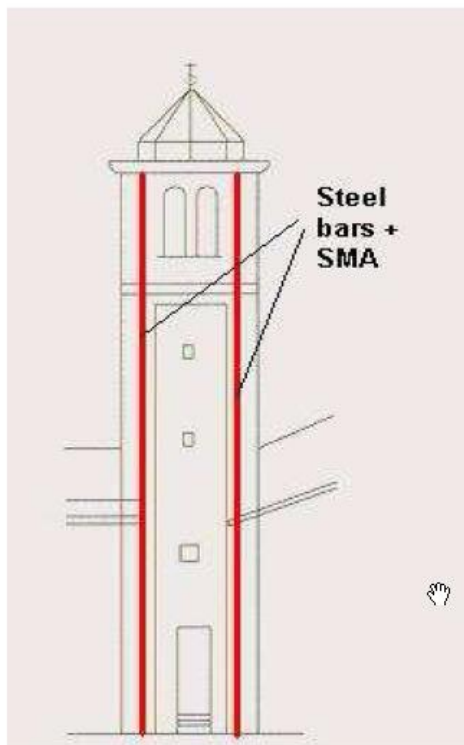
Rys. Pętle histerezy prętów SMA (nitinol) w stałej temperaturze (Lammering, Schmidt, 2001).

Schematy ideowe zastosowań SMA



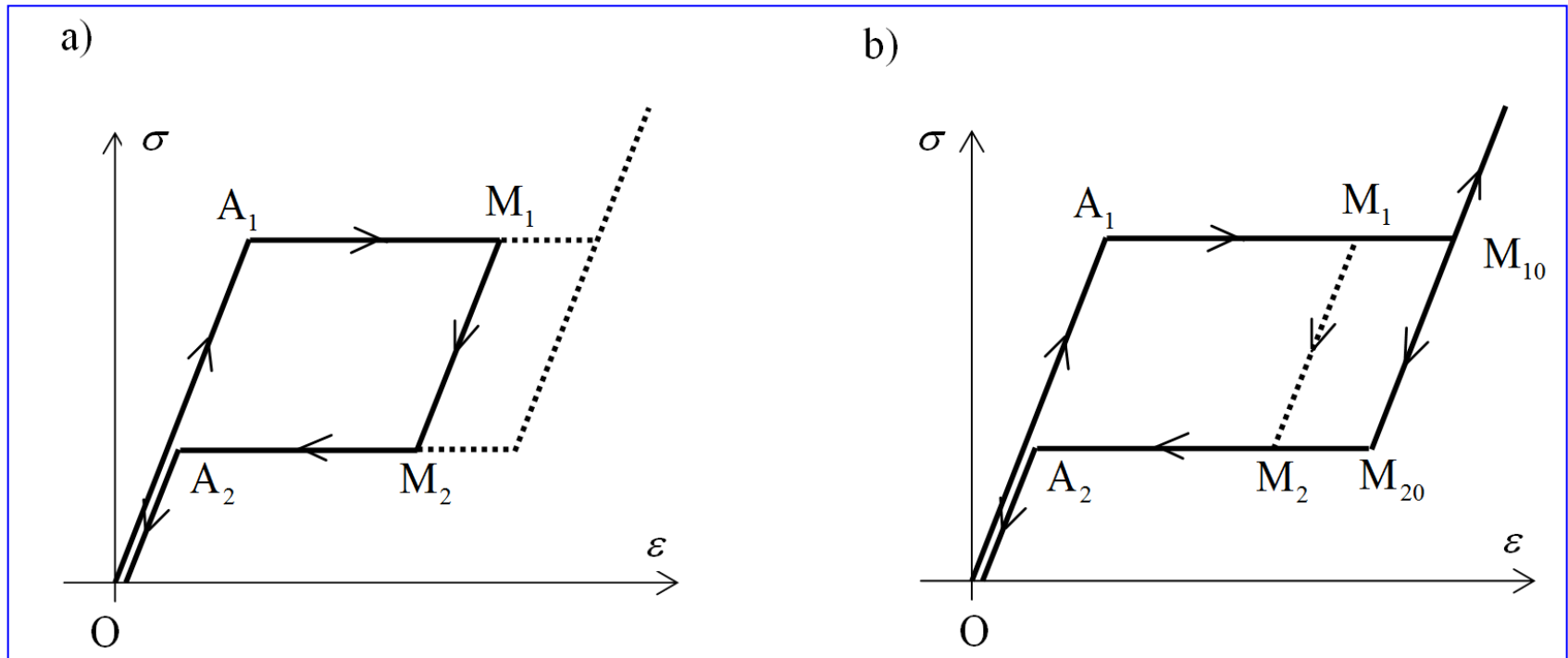
G. Song, N. Ma, H.-N. Li (2006)

Ochrona obiektów zabytkowych



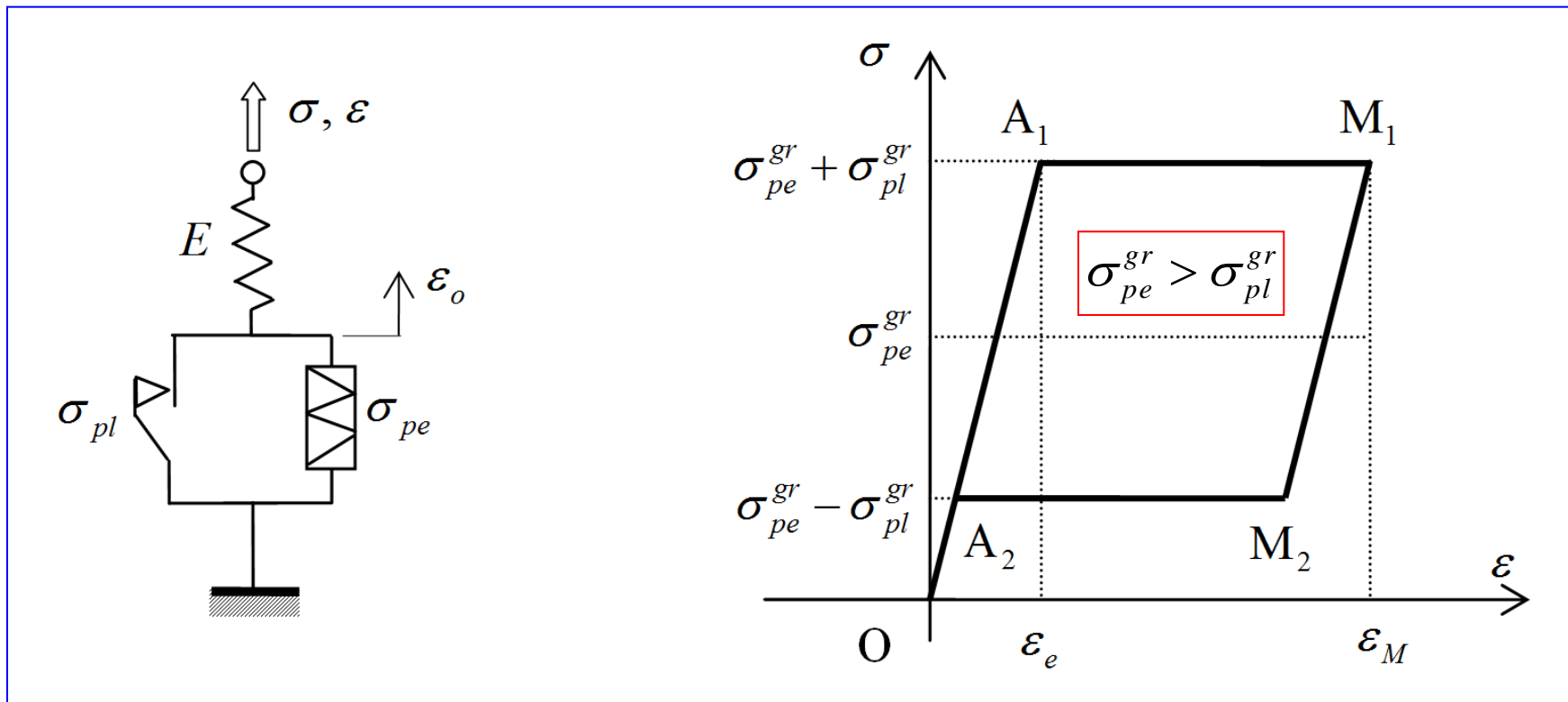
Seismic retrofit of the bell tower of the church of San Giorgio in Trignano (DesRoches and Smith, 2002)

Reologiczny model SMA



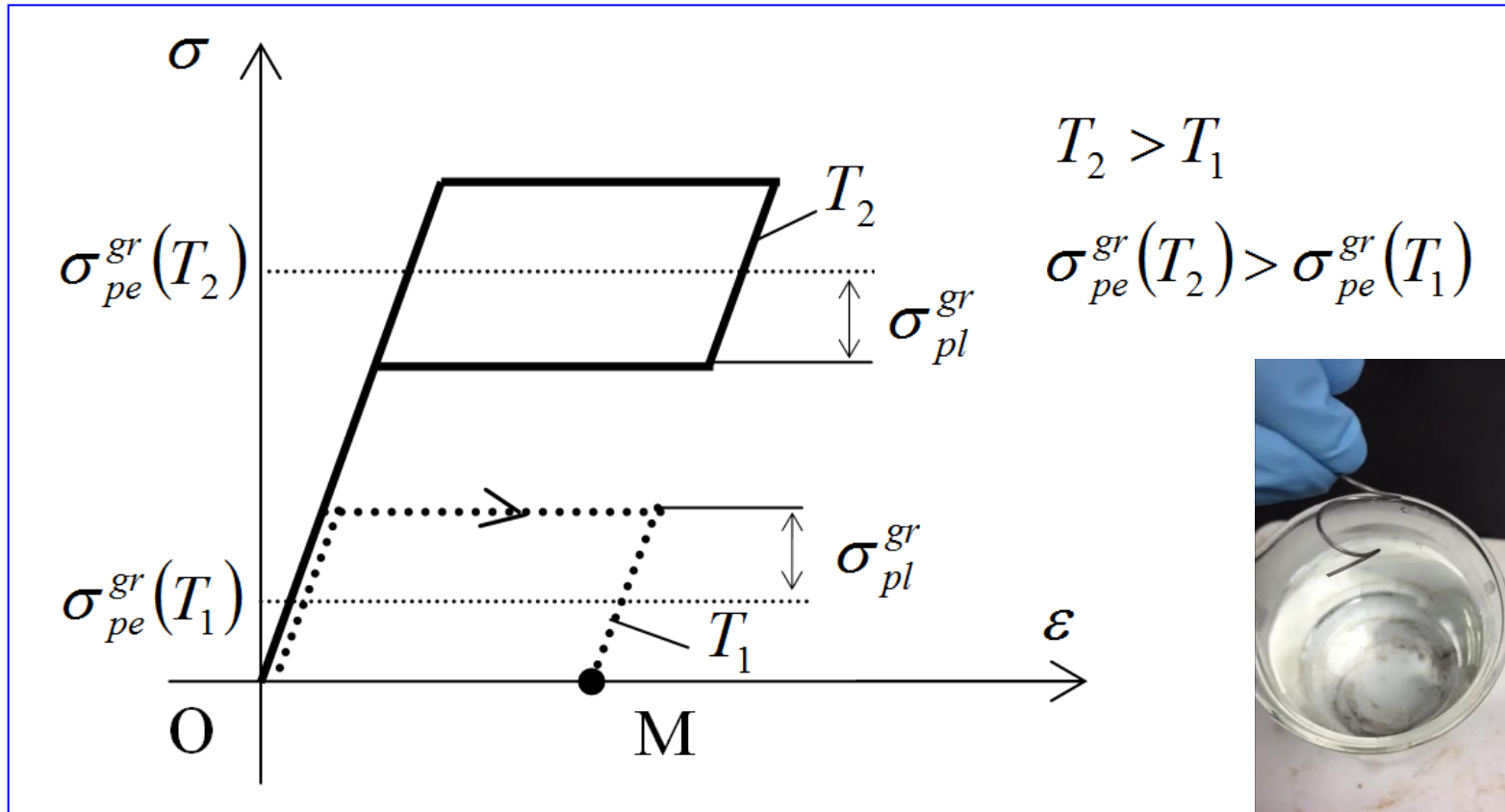
*Rys. Schematyczne wykresy izotermicznego odciążania próbki SMA
a) niepełna przemiana austenitu w martenzyt;
b) pełna przemiana austenitu w martenzyt.*

Podstawowa struktura reologiczna SMA



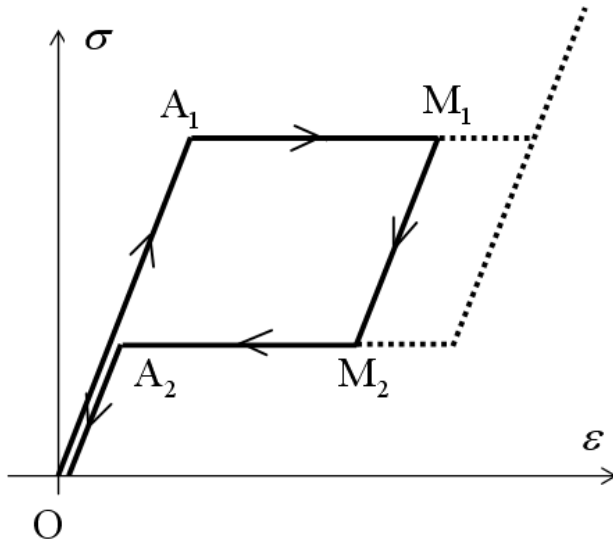
Rys. Wynik rozciągania modelu jednowymiarowej próbki ze stopu SMA

Wpływ temperatury



Rys. Wykresy obciążania próbki ze stopu SMA w temperaturze T_1 i T_2

Relacje konstytutywne podstawowego modelu



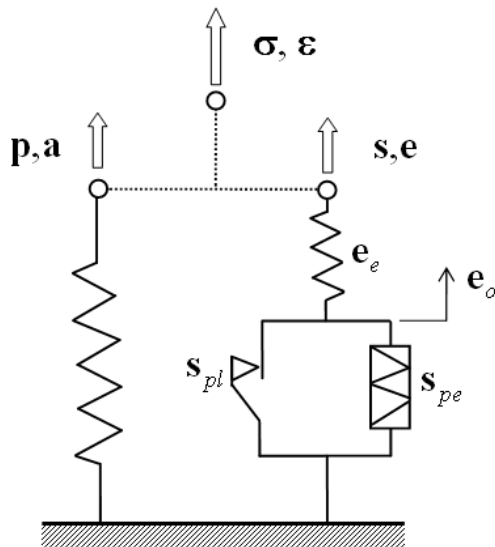
$$\mathbf{s}_{pl} + \mathbf{s}_{pe} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o)$$

$$\mathbf{e}_o = \lambda_{pe} \mathbf{s}_{pe}$$

$$\lambda_{pe} \geq 0, \quad \|\mathbf{s}_{pe}\|^2 \leq 2k_{pe}^2, \quad \lambda_{pe} \left(\|\mathbf{s}_{pe}\|^2 - 2k_{pe}^2 \right) = 0$$

$$\dot{\mathbf{e}}_o = \lambda_{pl} \mathbf{s}_{pl}$$

$$\lambda_{pl} \geq 0, \quad \|\mathbf{s}_{pl}\|^2 \leq 2k_{pl}^2, \quad \lambda_{pl} \left(\|\mathbf{s}_{pl}\|^2 - 2k_{pl}^2 \right) = 0$$



$$\mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_o = f_{SMA}(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$$

Jawna postać związków fizycznych

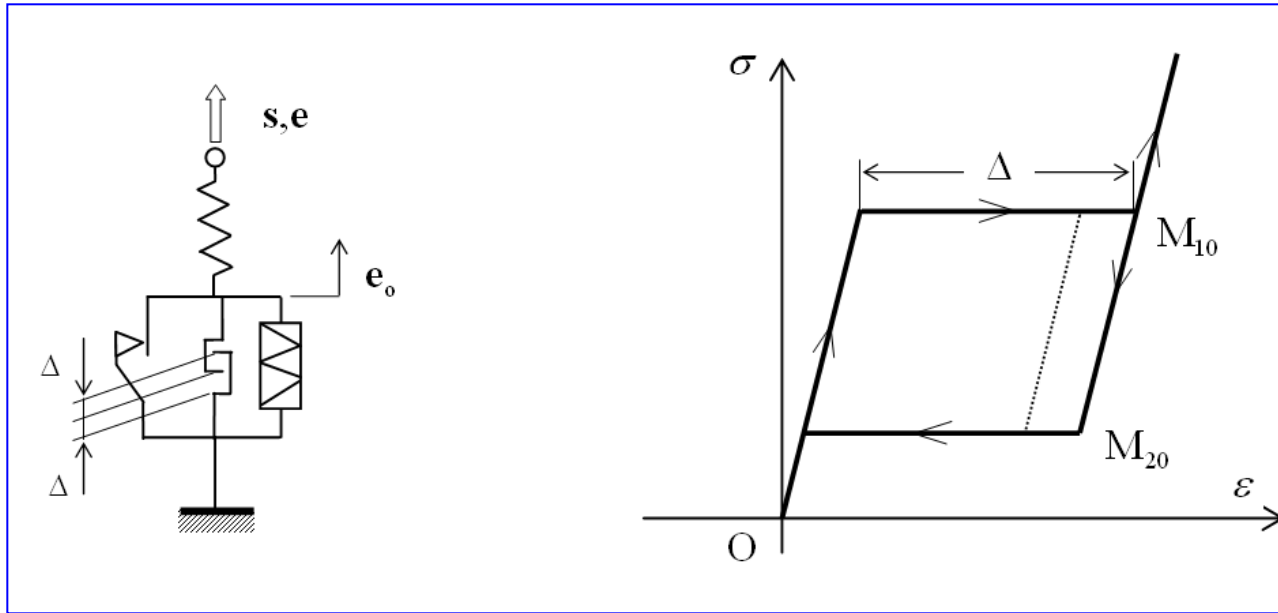
$$f_{\text{SMA}}(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{gdy } \|\mathbf{e}_o\| = 0 \wedge 2G\|\mathbf{e}\| < \sqrt{2}(k_{pl} + k_{pe}) \\ \mathbf{0} & \text{gdy } \|\mathbf{e}_o\| \neq 0 \wedge \|\mathbf{s}_{pl}\| < \sqrt{2}k_{pl} \\ \frac{[\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}}]^+}{\|\mathbf{e}\|^2} \mathbf{e} & \text{gdy } \|\mathbf{e}_o\| = 0 \wedge 2G\|\mathbf{e}\| = \sqrt{2}(k_{pl} + k_{pe}) \\ \lambda_{pl} \mathbf{s}_{pl} & \text{gdy } \|\mathbf{e}_o\| \neq 0 \wedge \|\mathbf{s}_{pl}\| = \sqrt{2}k_{pl} \end{cases}$$

$$\lambda_{pl} = \frac{[\mathbf{s}_{pl} \cdot \dot{\mathbf{e}}]^+}{2k_{pl}^2} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}k_{pe}}{2G\|\mathbf{e}_o\|} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{s}_{pe} \cdot \mathbf{s}_{pl}}{2k_{pe}k_{pl}} \right)^2 \right] \right\}^{-1}$$

$$\mathbf{s}_{pl} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o) - \frac{\sqrt{2}k_{pe}}{\|\mathbf{e}_o\|} \mathbf{e}_o$$

$$\mathbf{s}_{pe} = \frac{\sqrt{2}k_{pe}}{\|\mathbf{e}_o\|} \mathbf{e}_o$$

Model SMA z lockingiem



$$\mathbf{s}_{pl} + \mathbf{s}_{pe} + \mathbf{s}_{loc} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o)$$

$$\mathbf{e}_o = \lambda_{pe} \mathbf{s}_{pe}, \quad \lambda_{pe} \geq 0; \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{pe}\|^2 \leq k_{pe}^2, \quad \lambda_{pe} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{pe}\|^2 - k_{pe}^2 \right) = 0$$

$$\dot{\mathbf{e}}_o = \lambda_{pl} \mathbf{s}_{pl}, \quad \lambda_{pl} \geq 0, \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{pl}\|^2 \leq k_{pl}^2, \quad \lambda_{pl} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{pl}\|^2 - k_{pl}^2 \right) = 0$$

$$\mathbf{s}_{loc} = \lambda_{loc} \mathbf{e}_o, \quad \lambda_{loc} \geq 0, \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_o\|^2 \leq \Delta^2, \quad \lambda_{loc} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{e}_o\|^2 - \Delta^2 \right) = 0$$

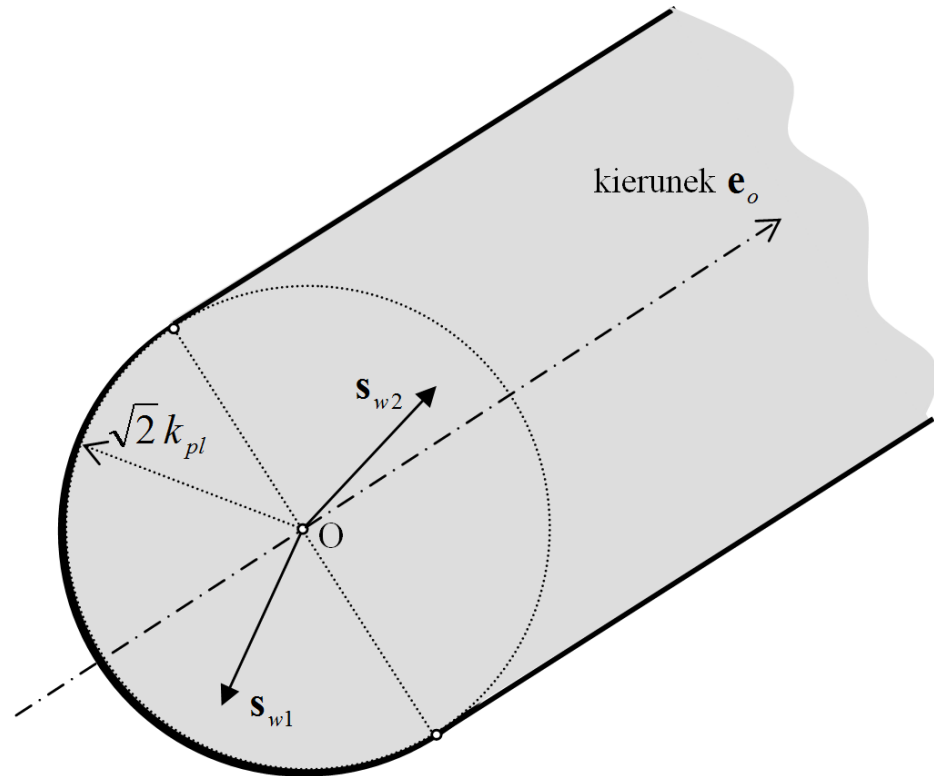
Przypadek szczególny

$$\mathbf{s}_w = \mathbf{s}_{pl} + \mathbf{s}_{loc} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o) - \frac{\sqrt{2}}{\|\mathbf{e}_o\|} k_{pe} \mathbf{e}_o$$

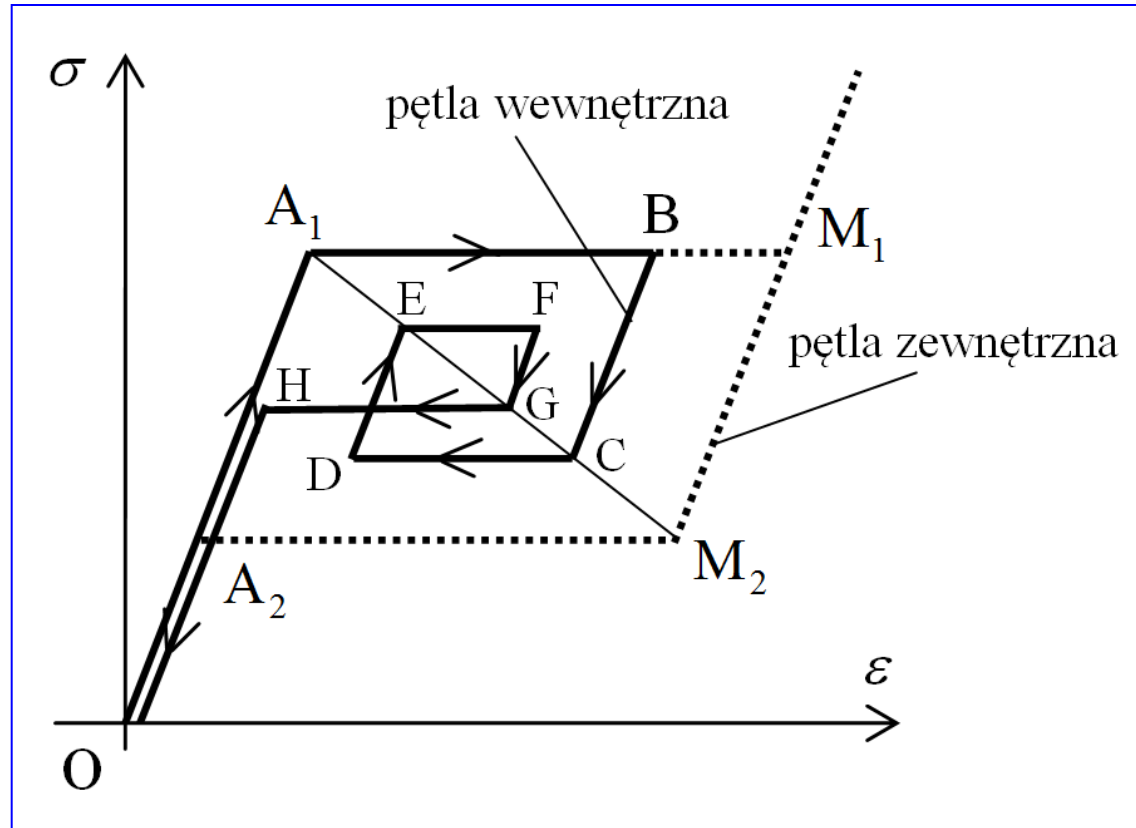
$$\|\mathbf{e}_o\| = \sqrt{2}\Delta$$

$$\|\mathbf{s}_w\| < \sqrt{2} k_{pl}$$

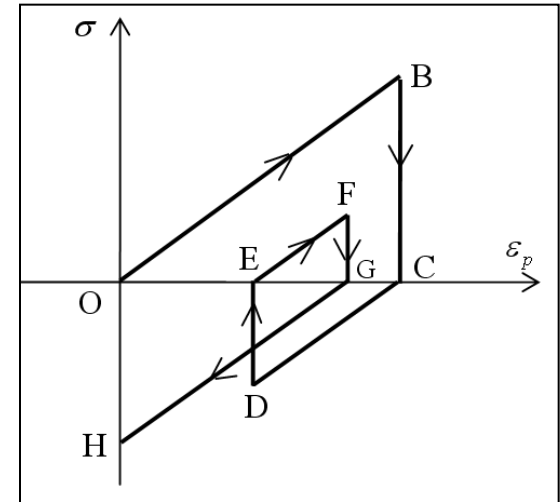
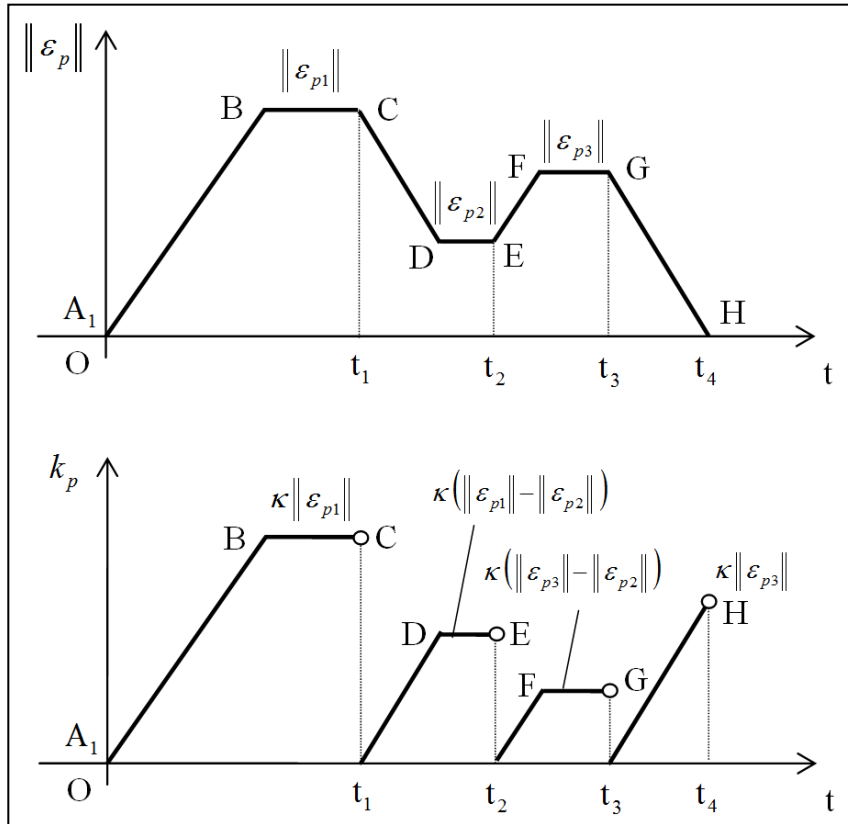
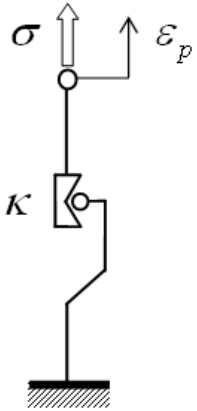
$$\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{0}$$



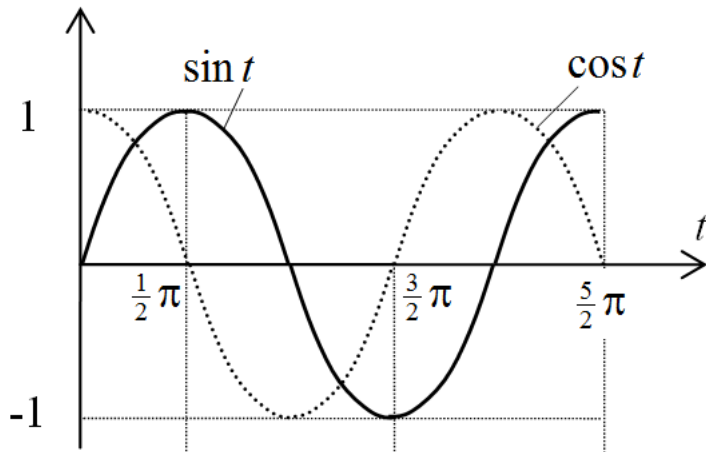
Model SMA z pętlami wewnętrznymi



Ciało z dwufazową plastycznością – zmodyfikowany model Kepesa

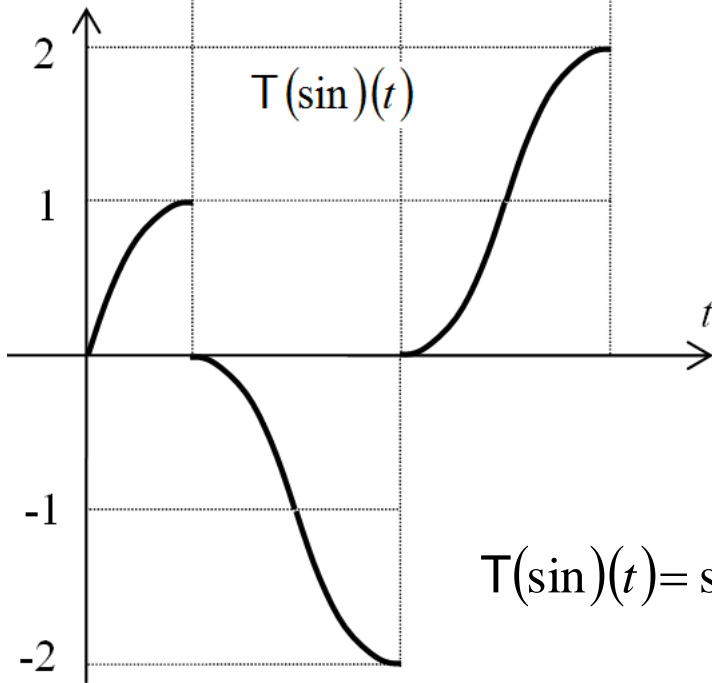


$$k_p(\|\varepsilon_p(t)\|) = \kappa |\mathcal{T}(\|\varepsilon_p\|)(t)|$$



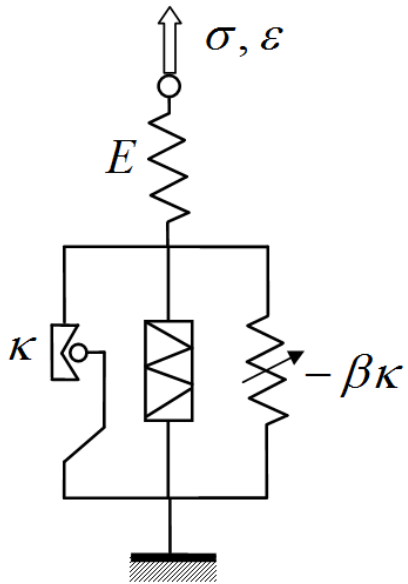
$$\mathbb{T}(f)(t) := \sum_{k=0}^{\infty} [f(t) - f(t_k)] \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

$$\chi_{[a,b)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \in [a,b) \\ 0, & \text{gdy } t \notin [a,b) \end{cases}$$



$$\mathbb{T}(\sin)(t) = \sin(t) \chi_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right)}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\sin(t) + (-1)^k] \chi_{\pi\left[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}(t)$$

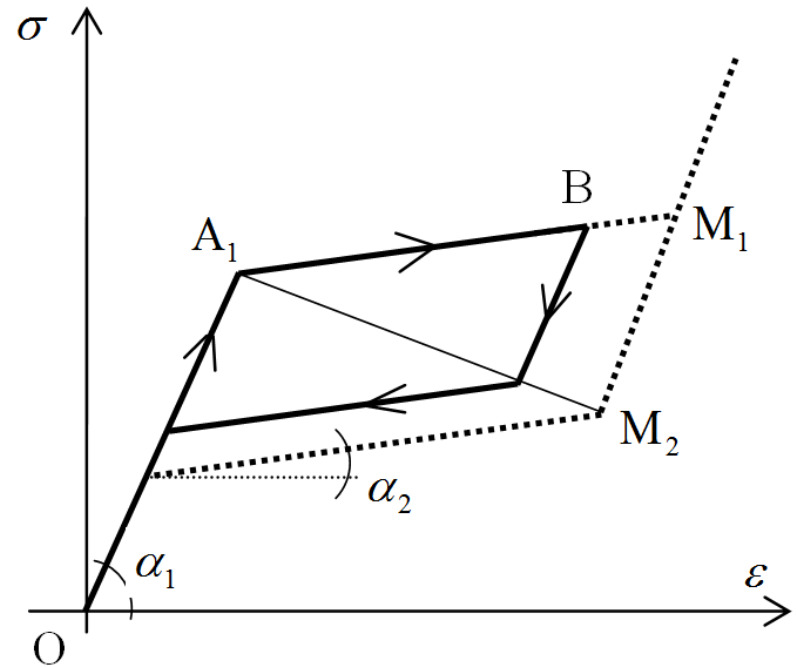
Struktura reologiczna SMA z pętlami wewnętrznymi



$$\alpha_1 = \arctg E$$

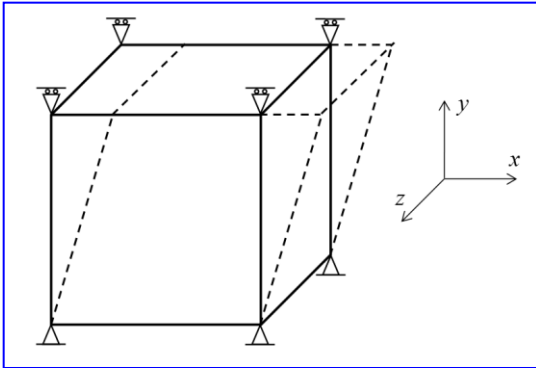
$$\alpha_2 = \arctg \frac{E(1-\beta)\kappa}{E+(1-\beta)\kappa}$$

$$\beta \in \langle 0,1 \rangle$$

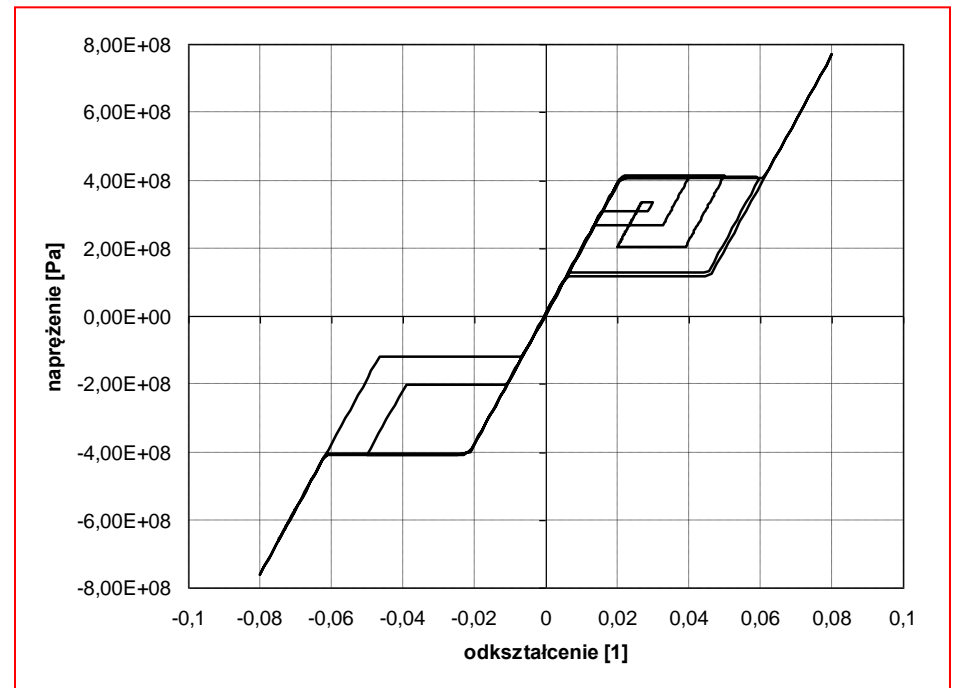
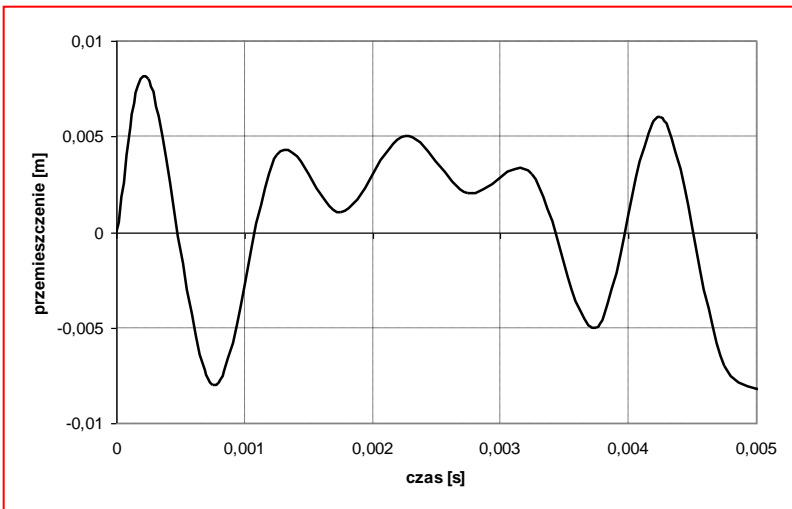


$$k_p(\|\varepsilon_p(t)\|) = \kappa \left| \mathbb{T}(\|\varepsilon_p\|)(t) \right|$$

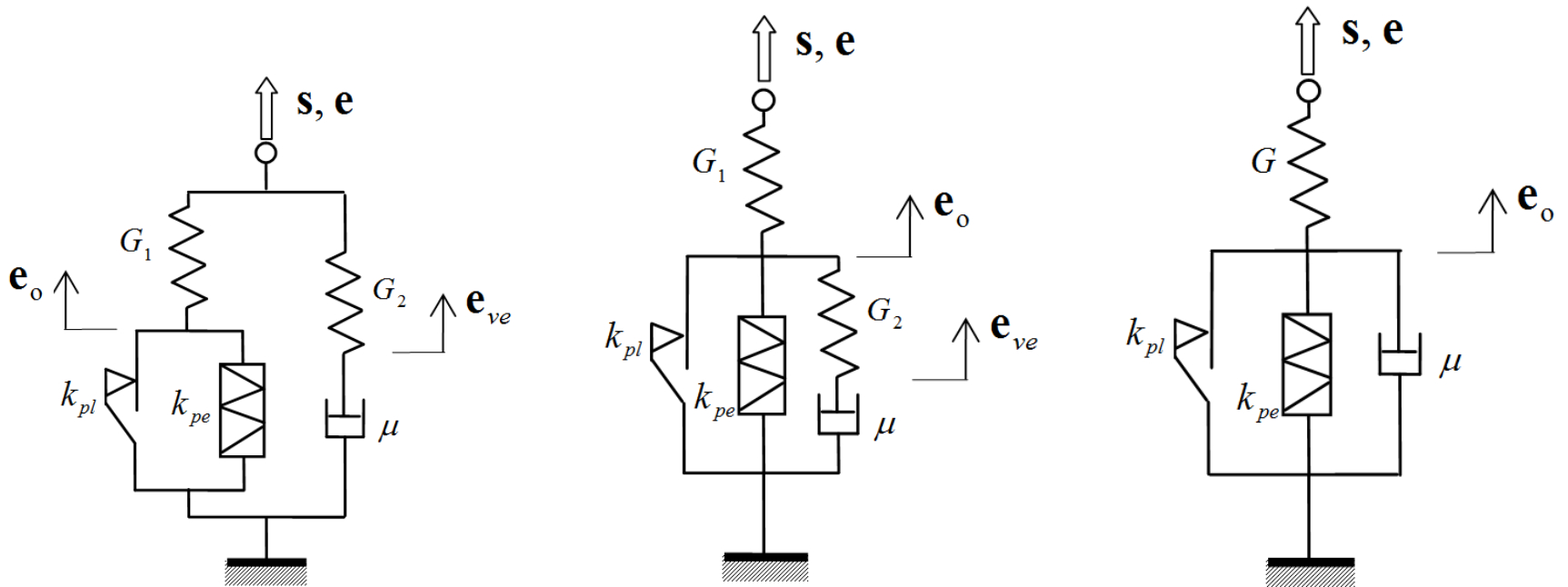
Przykładowy test numeryczny



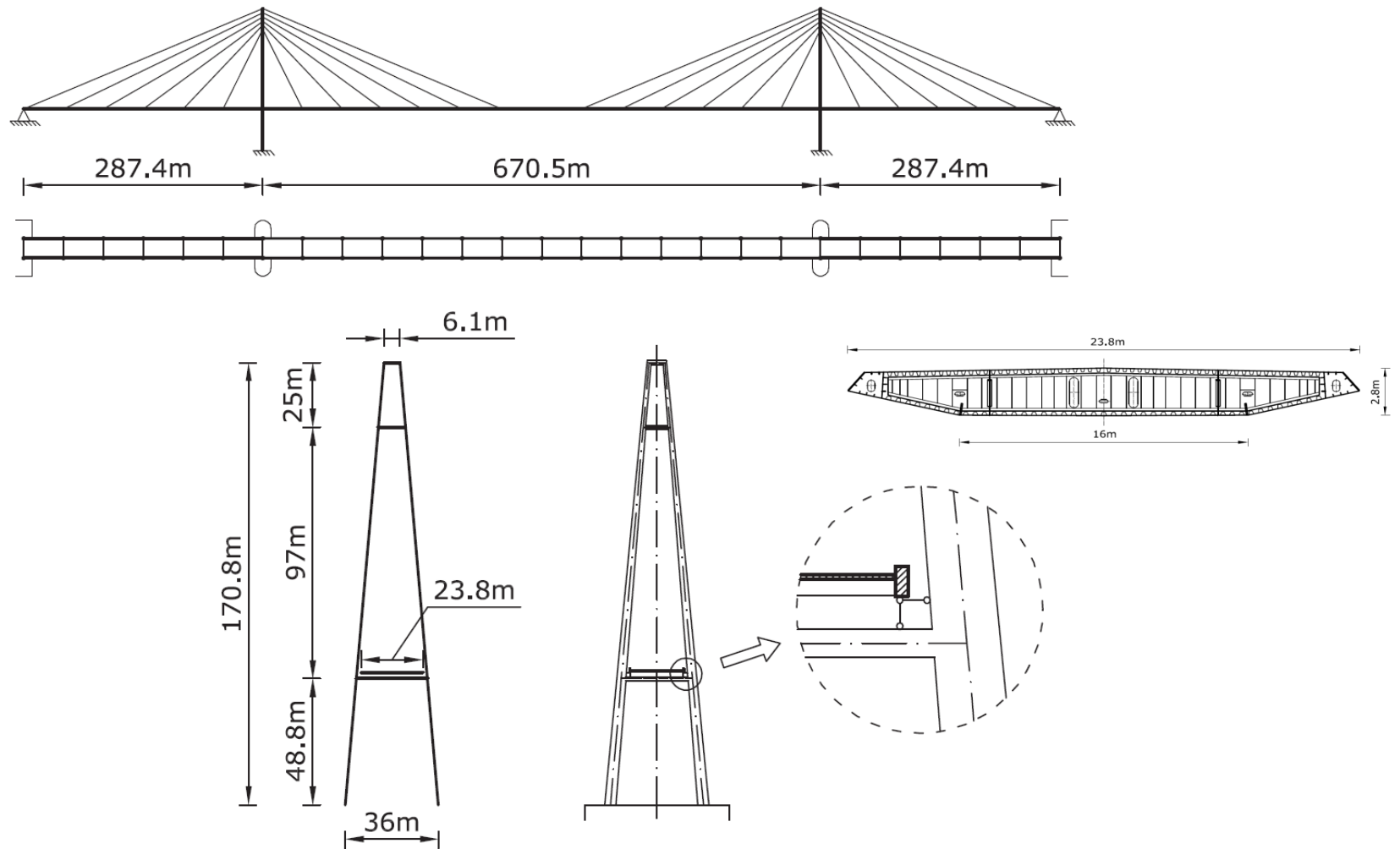
ρ [kg/m ³]	K [GPa]	G [GPa]	κ [GPa]	k_{pe} [MPa]	Δ [1]
6500	41,67	19,23	9,62	400	0,04



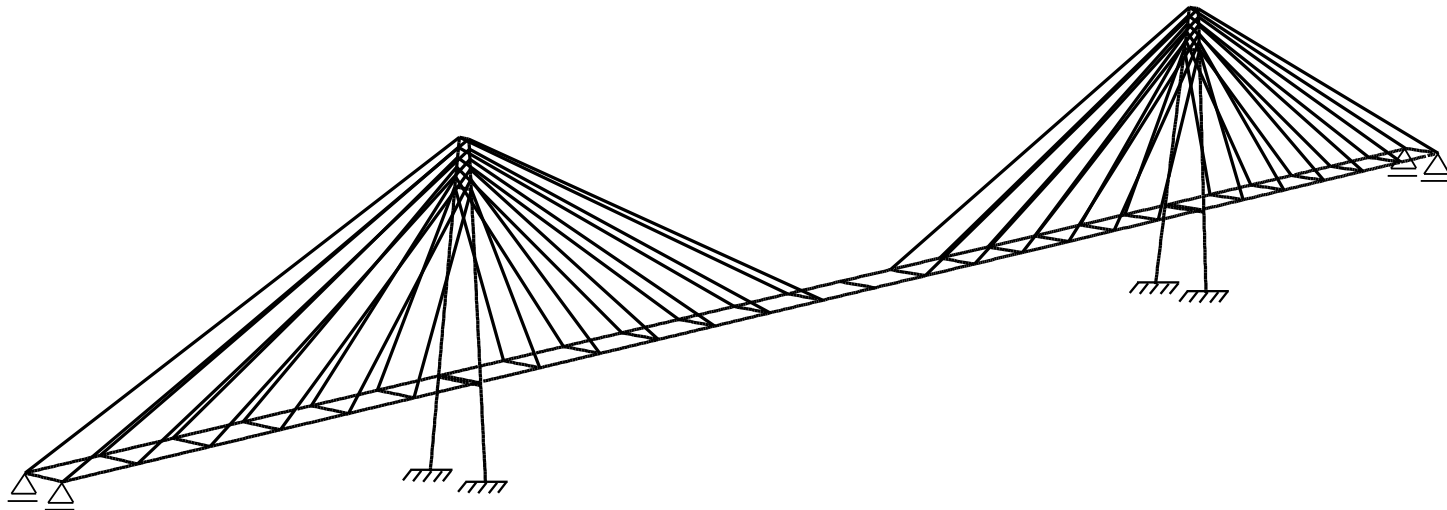
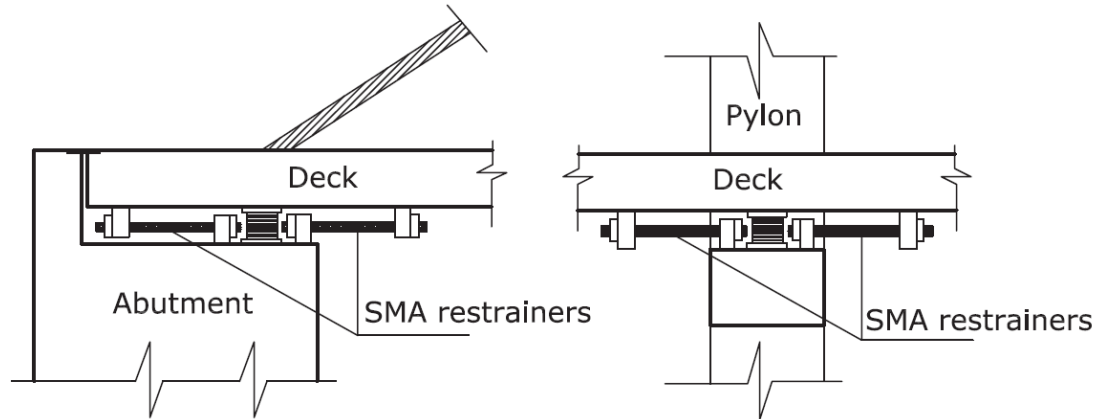
Struktury reologiczne SMA z lepkością



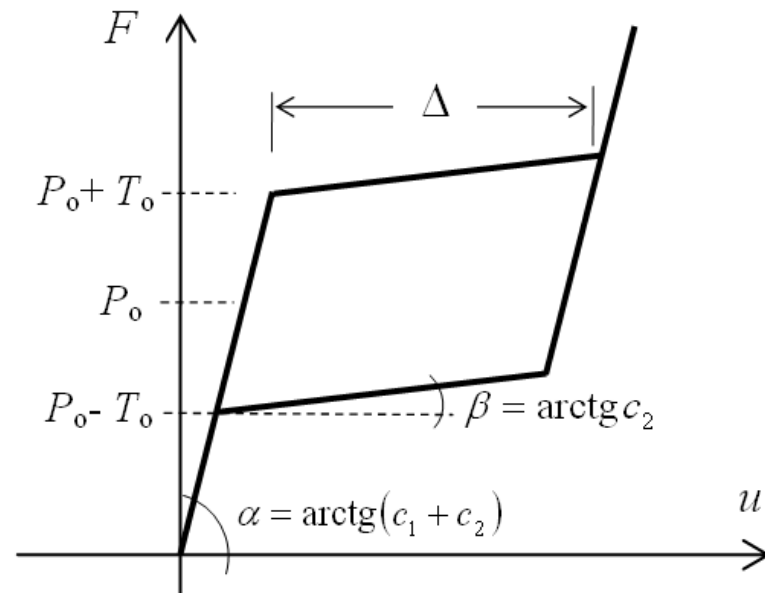
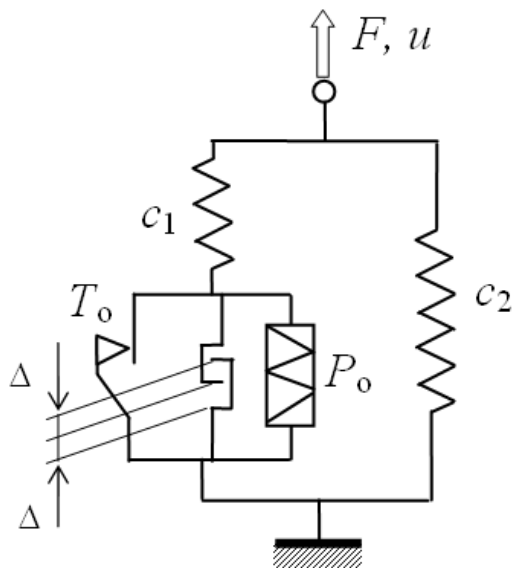
Model komputerowy mostu podwieszanego z tłumikami SMA



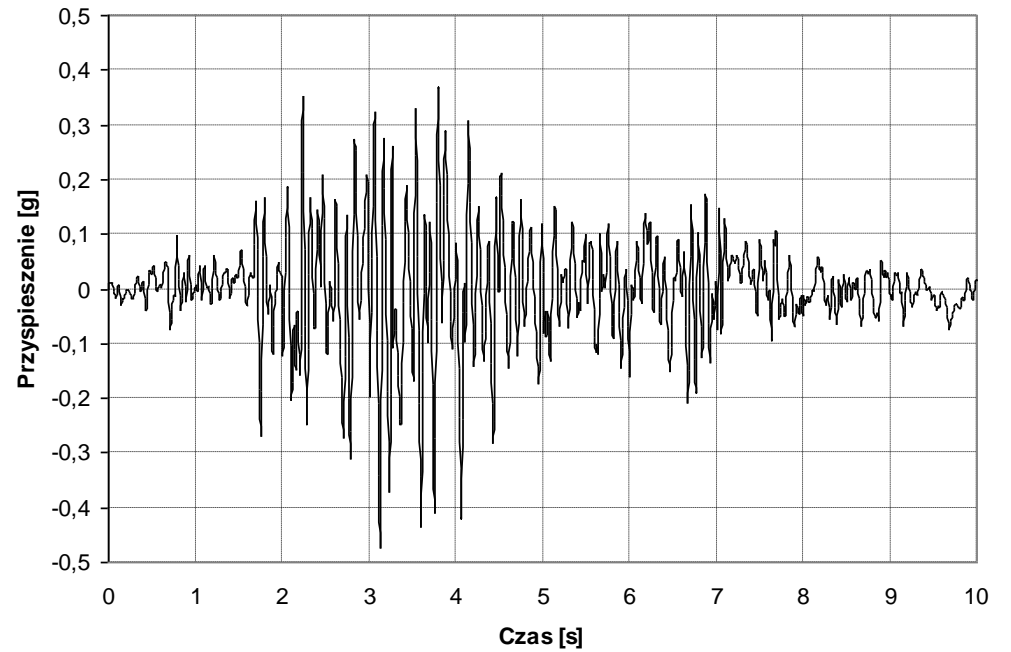
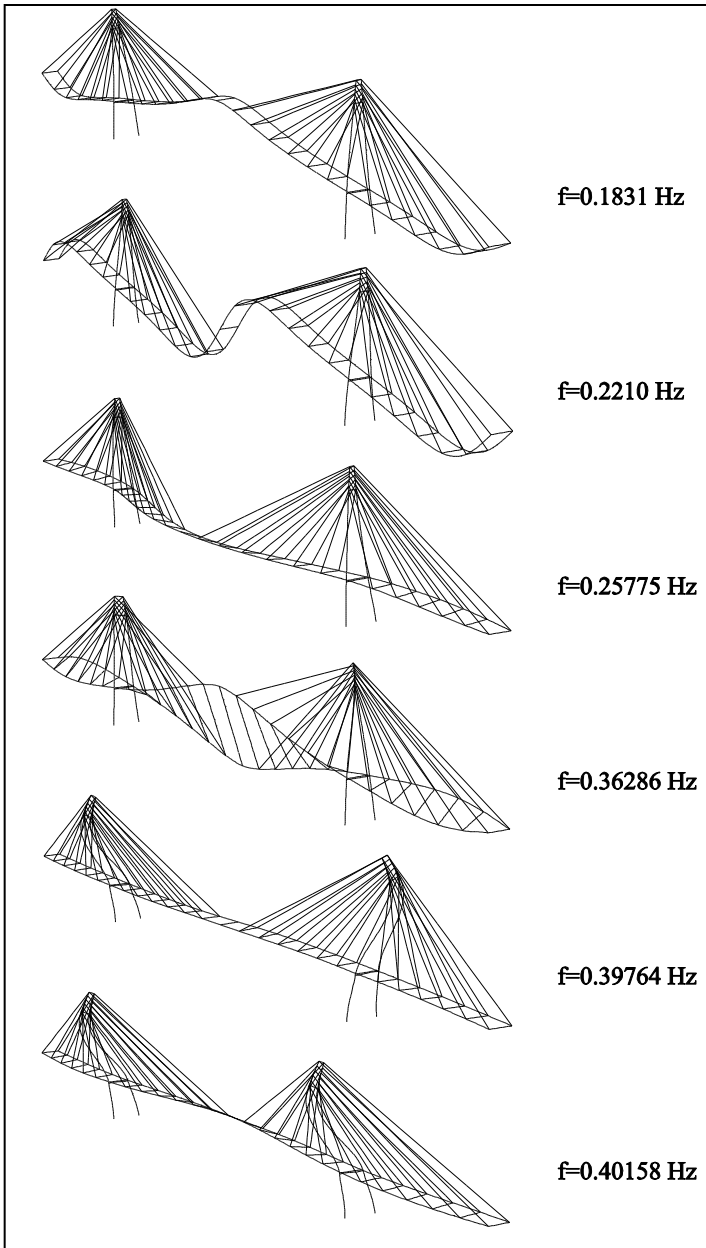
Szczegóły połączeń i widok modelu MES



Identyfikacja parametrów materiałowych ciągien SMA



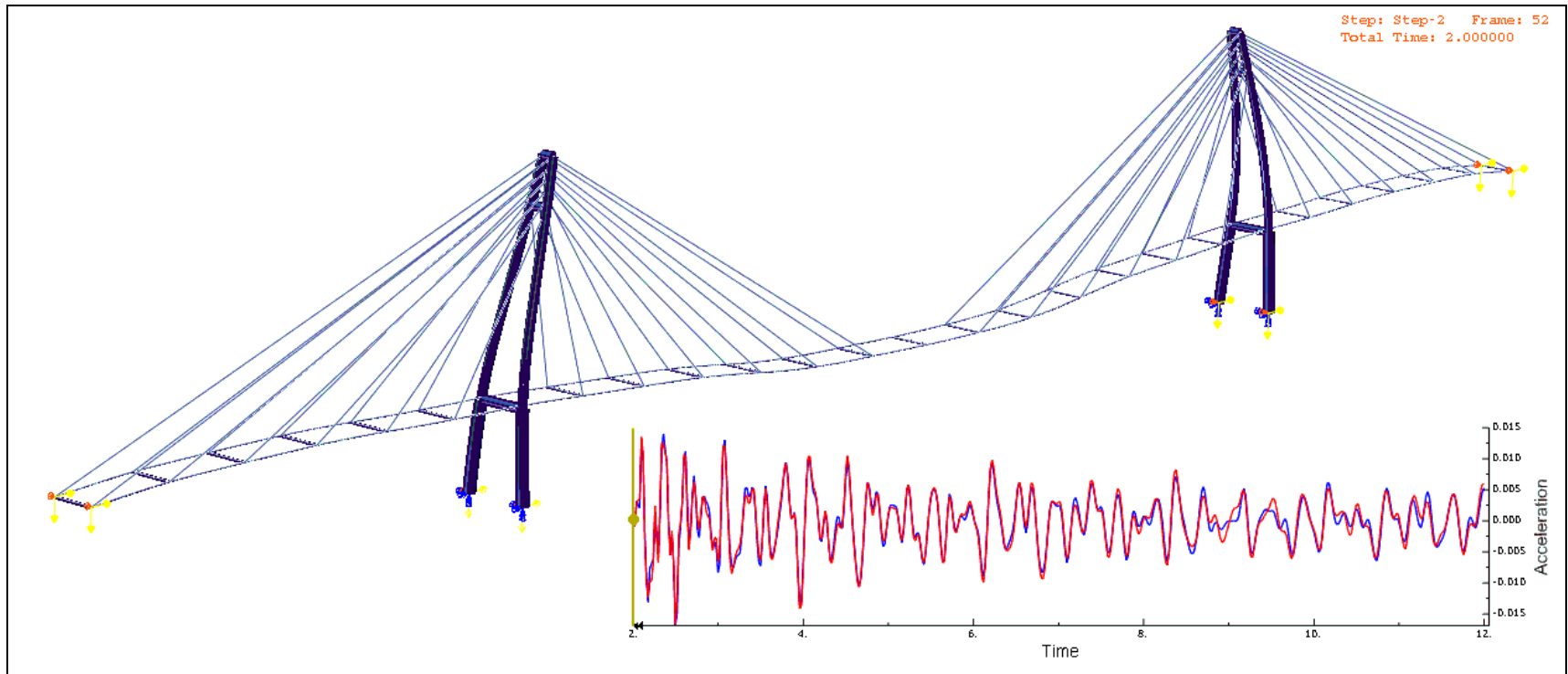
c_1 [MN/m]	c_2 [MN/m]	P_0 [MN]	T_0 [MN]	Δ [m]
400	20	4,0	1,7	0,06



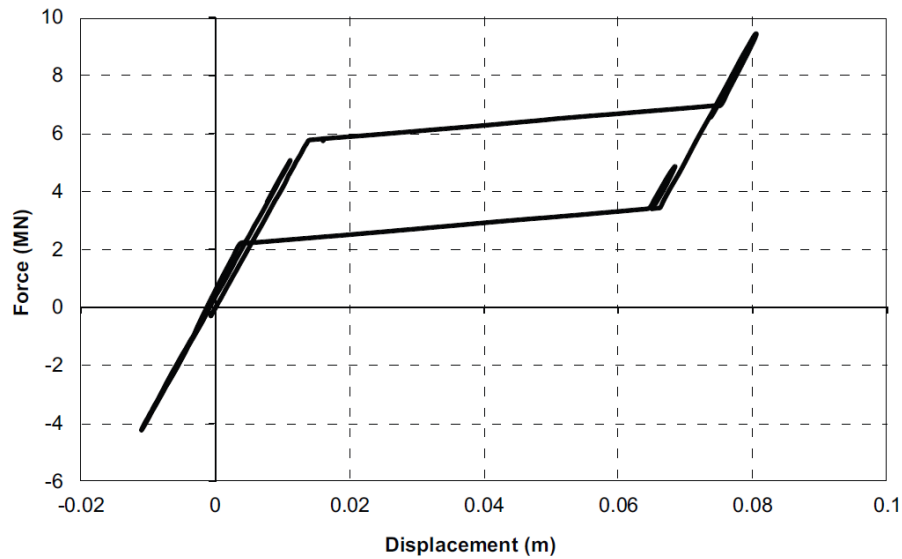
Rys. Sygnał wymuszenia kinematycznego przyjęty do analizy.

Rys. Pierwsze sześć postaci drgań własnych i odpowiadające im częstotliwości mostu porównawczego.

Symulacja drgań mostu

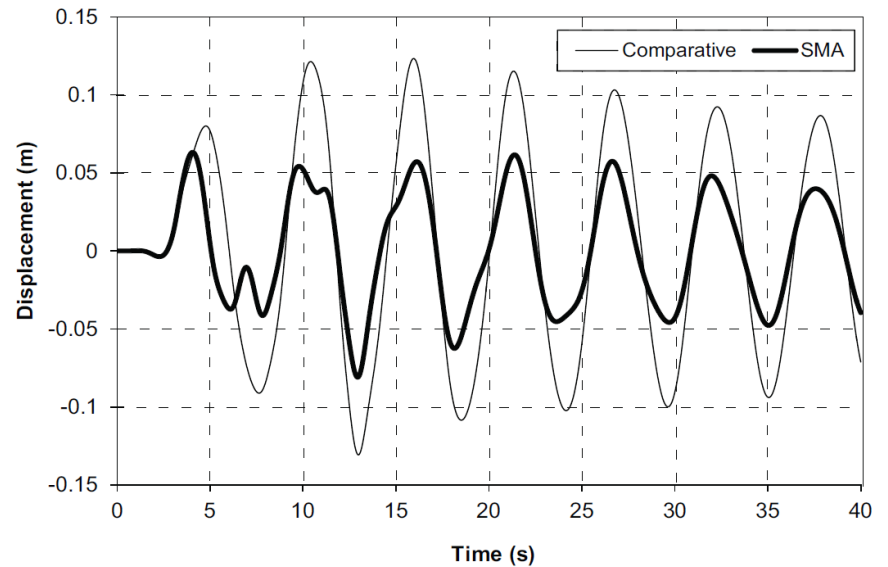


Wyniki obliczeń komputerowych

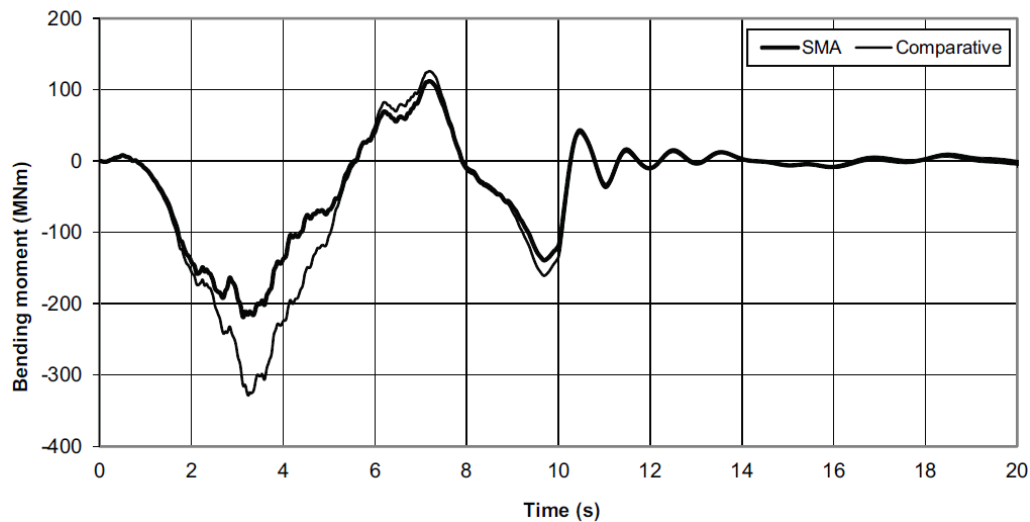


Rys. Pętla histerezy w cięgnach SMA

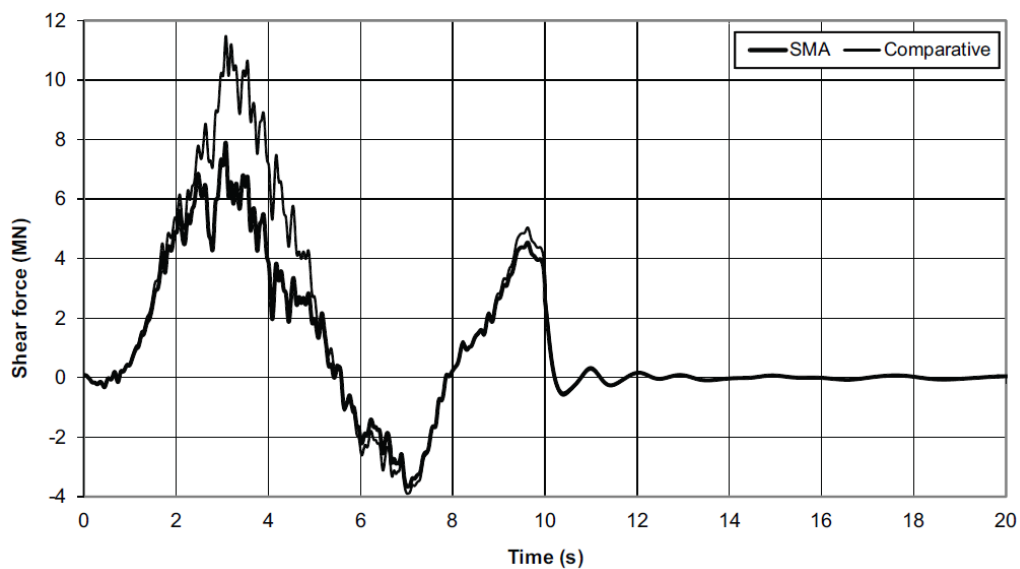
Rys. Wykresy przemieszczeń pionowych przęsła



Redukcja sił wewnętrznych w podstawie pylonu



Rys. Momenty zginające



Rys. Siły poprzeczne

Podsumowanie

- Zaproponowano oryginalne struktury reologiczne odwzorowujące konstytutywne cechy SMA, zawierające nieklasyczne elementy opisywane za pomocą nierówności wariacyjnych.
- Relacje konstytutywne SMA formułowano w formie jawnych równań różniczkowych zwyczajnych.
- Przedstawiono metodykę rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych przy zastosowaniu systemu MES oraz autorskich procedur materiałowych.
- Tematyka dalszych badań może obejmować zagadnienia identyfikacji nowoczesnych materiałów konstrukcyjnych za pomocą zaproponowanych struktur reologicznych.
- Opracowana metodyka może być wdrożona do analizy konstrukcji budowlanych wyposażonych w dyssypatory energii.

- [1] Zbiciak A., Michalczyk R., Oleszek R.: Vibration reduction of cable-stayed bridge model retrofitted with SMA restrainers. *Vibroengineering Procedia*, Vol. 3, pp. 180-185, 2014.
- [2] Grzesikiewicz W., Wakulicz A., Zbiciak A.: Mathematical modelling of pseudoelastic SMA material. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46 (6), pp. 870-876, 2011.
- [3] Zbiciak A.: Dynamic analysis of pseudoelastic SMA beam. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (1), pp. 56-64, 2010.
- [4] Zbiciak A.: Dynamika materiałów i konstrukcji o nieklasycznych charakterystykach sprężysto-dyssypacyjnych. Rozprawa habilitacyjna. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo z. 152*, s. 1-156, OWPW, Warszawa 2010.
- [5] Grzesikiewicz W., Wakulicz A., Zbiciak A.: Model konstytutywny materiału SMA z lockingiem. *Modelowanie Inżynierskie*, 37, s. 105-110, Gliwice 2009 (ISSN 1896-771X).
- [6] Grzesikiewicz W., Zbiciak A.: Modelowanie charakterystyki konstytutywnej materiału SMA z uwzględnieniem lepkości. *Modelowanie Inżynierskie*, 36, s. 113-118, Gliwice 2008 (ISSN 1896-771X).
- [7] Grzesikiewicz W., Zbiciak A.: A proposal of constitutive relations of SMA material subjected to dynamic loads. *COMPLAS IX. Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*, pp. 596-598, CIMNE, Barcelona, Spain, 2007.
- [8] Grzesikiewicz W., Wakulicz A., Zbiciak A.: Modelowanie matematyczne materiałów z pamięcią kształtu. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa 28-31 VIII 2007r. Streszczenia referatów s. 83, ISBN 978-83-7207-702-8. (pełny tekst 8 str. na płycie CD)
- [9] Grzesikiewicz W., Zbiciak A.: Mathematical modelling of rate-dependent SMA material subjected to dynamic loads. *Proceedings of 15th French-Polish Seminar of Mechanics*, pp. 138-143, Polytech'Lille, Villeneuve d'Ascq, France, 2007.
- [10] Grzesikiewicz W., Zbiciak A.: Relacje konstytutywne materiału z pamięcią kształtu wrażliwego na prędkość deformacji. *XIV Warsztaty Naukowe PTSK „Symulacja w badaniach i rozwoju”*, s. 99-104, Krynica-Zdrój 2007.

Politechnika
Warszawska

Dziękuję za uwagę

